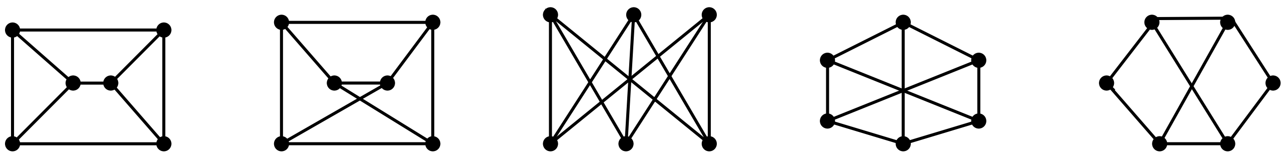
Université de Blida 1
Faculté des sciences
Département de mathématiques

20 Mars 2021
Durée 02 heures

Concours national d'accès à la formation doctorale en mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

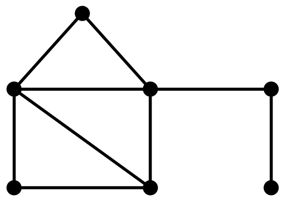
Exercice 1 : (6.75 points= 1+ 0.75 + 1 + 2 + 2)

1. Existe-t-il un graphe simple ayant 13 sommets et 31 arêtes où 3 sommets sont de degré 1 et 7 sommets sont de degré 4 ? Expliquer et justifier votre réponse.
2. Quels sont ceux des graphes suivants qui sont isomorphes ?



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4 (e) G_5

3. Un graphe simple d'ordre n est tel que chacun de ses sommets est de degré au moins $\dfrac{n-1}{2}$. Montrer que ce graphe est connexe.
4. Soit T un arbre. Montrer que les sommets de T ont tous un degré impair si et seulement si pour toute arête e de T, chacune des deux composantes de $T - e$ a un ordre impair.
5. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple ayant au moins une arête. On appelle graphe adjoint de G noté G^* le graphe obtenu en représentent chaque arête de G par un sommet dans G^* et deux sommets de G^* sont adjacents si les arêtes correspondantes dans G sont adjacentes.
   — Donner le graphe adjoint du graphe suivant :



   — Montrer que le graphe adjoint du graphe complet K_n, $(n \geq 2)$ est un graphe régulier. Donner dans ce cas, le degré, l'ordre et le nombre d'arêtes du graphe adjoint.

Exercice 2 : (3.5 points = 1+ 0.75 + 0.25 +0.75 + 0.75)

Un pharmacien fabrique 3 sortes de médicaments en utilisant deux composants de base : calcium et fer. Pour cela, il a besoin d'au moins 360 gr de calcium et 240 gr de fer. On sait de plus que :

— 1gr du 1er médicament coûte 6 DA et nécessite 5gr de calcium et 4gr de fer.

— 1gr du 2ème médicament coûte 7 DA et nécessite 3gr de calcium et 1gr de fer.

— 1gr du 3ème médicament coûte 5 DA et nécessite 2gr de calcium et 3gr de fer.

Le pharmacien veut établir un plan de production de moindre coût des trois médicaments. Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire (P_1).

Un fournisseur propose de fournir le pharmacien en calcium et fer pour la fabrication des trois médicaments. Le fournisseur tient à gagner le maximum d'argent, mais le pharmacien ne voudra pas acheter les deux produits à n'importe quel prix.

1. Traduire ce problème en un programme linéaire (P_2).
2. Que représente (P_2) par rapport à (P_1).
3. Résoudre graphiquement (P_2).
4. En déduire une solution optimale pour (P_1).

Exercice 3 :(3 points : 0.25+0,75 + 1 + 1)

Considérons le problème de programmation linéaire sous sa forme standard

$$(P)\begin{cases} \min Z & = cx \\ Ax & = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

1. Écrire le dual (D) de (P).
2. Montrer que si (P) admet un ensemble de solutions réalisables pour lesquelles la fonction objectif n'est pas bornée, alors (D) n'a pas de solution réalisable.
3. Montrer que si X^1 et X^2 sont deux solutions optimales distinctes de (P) alors tout vecteur $X^* = \alpha\ X^1 + (1-\alpha)X^2$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et aussi solution optimale de (P).
4. Soit X^* une solution optimale de (P). Montrer que si X^* peut s'écrire $X^* = \alpha X^1 + (1-\alpha)X^2$, avec $0 < \alpha < 1$ où X^1 et X^2 sont deux solutions réalisables de (P), alors X^1 et X^2 sont deux solutions optimales de (P).

Exercice 4 : (2 points : 1+1)

1. On veut construire un lieu de stock qui sert à fournir m magasins tels que la distance maximum du stock au magasins sera la plus petite possible. Modéliser mathématiquement ce problème.
2. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On définit les moyennes suivantes :

$$M_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } M_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Montrer que $M_a \leq M_q$.

Exercice 5 : (4.75 points : 1.75 + 3)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \equiv \begin{cases} \min\left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 \\ g_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ g_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + (x_2-2)^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$$

1. En faisant une interprétation géométrique, déterminer la solution optimale de ce problème.
2. Résoudre le problème en utilisant les conditions de Kuhn et Tucker (KKT).