Université Saâd Dahlab - Blida 1
2020/2021

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation doctorale

Filière : Mathématiques

Épreuve 2 : Analyse fonctionnelle et équations différentielles, Durée : 2h00

Exercice 1 (5 points)

Soient f_ε et g_ε deux fonctions réelles définies, pour $\varepsilon > 0$, par :

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{si } t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad , \quad g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{si } t \in [0, \varepsilon], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que f_ε, $g_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (l'espace des distributions).
2. Dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer les limites : $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} f_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} g_\varepsilon$, et $\lim\limits_{j \longrightarrow \infty} \delta_j$.

Exercice 2 (8 points)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$ et $T : E \to E$ l'opérateur défini par :

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt, \ x \in [0,1].$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $T \in \mathcal{K}(E)$ (c-à-d T compact).
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $|T^n f(x)| \leqslant \dfrac{x^n}{n!} \|f\|_\infty$.
4. Déterminer le rayon spectral et le spectre de T.
5. Si un opérateur A est bijectif et $A \in \mathcal{K}(E)$, a-t-on $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$? Justifier la réponse.

Exercice 3 (7 points)

Soient E un espace de Hilbert et $A : E \to E$ un opérateur autoadjoint continu. On désigne par $A \pm i$ les opérateurs

$$x \mapsto Ax \pm ix \ (x \in E).$$

1. Calculer $\|Ax \pm ix\|^2$; en déduire que les opérateurs $A \pm i$ sont injectifs.
2. On pose
$$R(A \pm i) = \{Ax \pm ix, x \in E\}.$$
Montrer que que si $z \in E$ et est orthogonal à $R(A+i)$ alors $z = 0$. En déduire que les sous-espaces vectoriels $R(A \pm i)$ sont denses dans E.
3. Montrer que $R(A \pm i) = E$.
4. A l'aide des résultats précédentes, montrer que les opérateurs $(A+i)^{-1}$ et $(A-i)^{-1}$ existent et sont continus.
5. On pose
$$U = (A-i)(A+i)^{-1}$$
Montrer que U est une isométrie.